№11-дәріс

Күрделі функция туындысы. Кері функцияның туындысы. Логарифмдік дифференциалдау. Параметрге байланысты функцияның туындысы.

Күрделі функцияның туындысы.

Егер $t=\varphi(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, ал $y=f(t)$ функциясының $t_0=\varphi(x_0)$ нүктесінде туындысы бар болса, онда $y=f[\varphi(x)]$ күрделі функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар және

$$f'(\varphi(x))\big|_{x=x_0}=f_t'(t_0)\cdot\varphi'(x_0),\text{ немесе } y_x'=y_t'\cdot t_x.$$

$y=f[\varphi(x)]$ күрделі функциясының дифференциалын қарастырайық:

$$dy=y_x'\cdot dx$$

$y_x'=y_t'\cdot t_x'$ теңдігін және $t_x'\cdot dx=dt$ екендігін ескеріп,

$$dy=y_t'\cdot t_x'\cdot dx=y_t'\cdot dt$$

тәуелсіз айнымалыны басқа айнымалымен ауыстырсақ та, дифференциал түрінің өзгермейтін қасиетін *дифференциал түрінің инварианттығы* деп атайды.

Мысал 1 $y=\sin^2 x^3=\left[\sin x^3\right]^2$.

$$u=\sin x^3,\ \alpha=2\Rightarrow y'=2\left(\sin x^3\right)^{2-1}\cdot\left(\sin x^3\right)'\Rightarrow$$

$$u=x^3\Rightarrow 2\sin x^3\cdot\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\sin 2x^3.$$

Кері функцияның туындысы.

$y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз, қатаң монотонды болсын және x_0 нүктесінде 0-ден өзгеше туындысы бар болсын, яғни, $\dfrac{df(x_0)}{dx}\neq 0$.
Онда $x=\varphi(y)$ кері функциясының $y_0=f(x_0)$ нүктесінде туындысы бар:

$$\frac{d\varphi(y_0)}{dy}=\frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Яғни, кері функцияның туындысы берілген функция туындысының кері мәніне тең.

Айқын емес(жабық) функцияның туындысы.

Дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясы $F(x, y) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсін. Онда $F(x, y(x)) = 0$ күрделі функция ретінде дифференциалдап, $\frac{dy}{dx}$ туындысын табуға болады.

Мысал 2. $x^2y^3 - y - x^2 = 4x$ функциясының туындысын тап.

$$\left(x^2y^3 - y - x^2\right)' = (4x)' \Rightarrow \left(x^2\right)'y^3 + x^2\left(y^3\right)' - y' - \left(x^2\right)' = 4 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2 \cdot y' - y' - 2x = 4 \Rightarrow$$

$$\left(3x^2y^2 - 1\right)y' = 4 - 2xy^3 + 2x \Rightarrow y' = \frac{4 - 2xy^3 + 2x}{3x^2y^2 - 1}.$$

Функцияның логарифмдік туындысы

$y = f(x)$ функциясының екі жағын логарифмдеп, $\ln y = \ln(f(x))$, дифференциалдасақ, онда $\frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))'$ туындысы логарифмдік туынды деп аталады. Логарифмдік туындыны қолданып, $y = u^v$ дәрежелік-көрсеткіштік функциясының туындысын анықтайық:

$\ln y = \ln u^v \Rightarrow \ln y = v \cdot \ln u$ екі жағын дифференциалдап, $\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'$ теңдігін аламыз. $y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'\right)$ теңдігі берілген функцияның туындысын анықтайды.

Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

x айнымалысына тәуелді y функциясы параметрлік түрде берілсін

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1.$$

$x = \varphi(t)$ функциясының кері функциясы бар болып, $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар, сонымен қатар, $\psi'(t) \ne 0$ болсын. Онда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Мысал 3. y'_x тап.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

$$x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t, \qquad y'_t = (a\sin t)' = a\cos t \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{a\sin t} = -ctgt.$$